

3.6 Referenciais n. inerciais

$\Sigma \rightarrow$ ref inercial; Σ' ref girante c/ mesma origem e vel. $\vec{\omega}$

$\Rightarrow \vec{r}_{\Sigma} = \vec{r}_{\Sigma'} \equiv \vec{r}$ (componentes são obviamente distintas)

$$\Sigma : m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

pela rel. geral: $\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\equiv \vec{v}_{in}} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\equiv \vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\rightarrow$ obs: Nivaldo adota uma notação que pode confundir, teria sido melhor usar $\vec{v}'$ p/ rel. em Σ' !

$$\begin{aligned} \text{novamente: } \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\Sigma} &= \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\Sigma'} + \left(\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\Sigma'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

$$\text{obs: } \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

$\therefore$ no sistema Σ' :

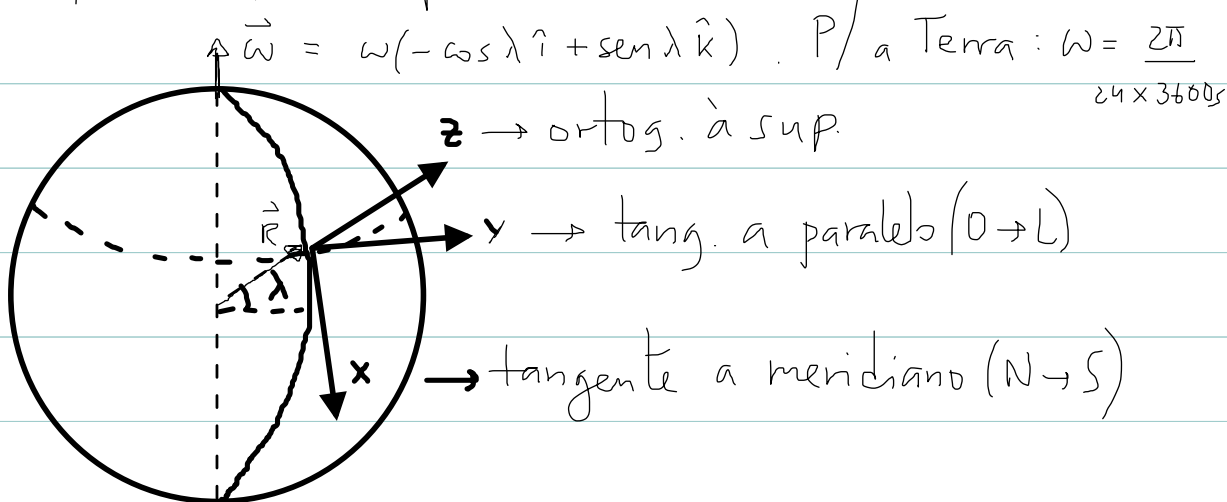
Força "efetiva" no ref. girante

$$\underbrace{m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\Sigma'}}_{\equiv \vec{a}} = \vec{F} + \underbrace{2m\vec{v} \times \vec{\omega}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}_{\text{centrífuga}} + \underbrace{m\vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{Euler}}$$

obs: se as origens n. coincidem, podemos considerar um 3º ref. $\tilde{\Sigma}$ com mesma origem de Σ' mas com orientação fixa c/ respeito a Σ : $\vec{r}_{\Sigma} = \vec{r}_{\tilde{\Sigma}} + \vec{r}_0$

Nesse caso a eq. acima vale com $\vec{r} = \vec{r}_{\Sigma'} = \vec{r}_{\tilde{\Sigma}}$, e $\vec{F} = \vec{F}_{\tilde{\Sigma}} = \vec{F}_{\Sigma} - m \left(\frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} \right)_{\Sigma}$

Aplicação: ref. na sup. da Terra



$\lambda =$ latitude do ponto de origem de Σ'

Σ : origem no centro da Terra

$\rightarrow$ vetor fixo do ref. Σ'

$\therefore$ a diferença entre as origens é $\vec{r}_0 = R\hat{k} \equiv \vec{R}$

portanto: $\left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}\right)_\Sigma = \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}\right)_{\Sigma'} + 2\vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt}\right)_{\Sigma'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_0)$ O se $\omega = \text{cte}$ (OK p/ Terra)

assim, a força efetiva no ref. Σ' é composta por:

trocando o sinal

$$m\vec{a} = \vec{T} + \underbrace{m\vec{g} + m\vec{\omega} \times (\vec{R} \times \vec{\omega})}_{\text{centrífuga II (devido à acel. do ref. } \Sigma') \equiv m\vec{g}_{\text{ef}} \text{ (Peso efetivo)}} + \underbrace{2m\vec{v} \times \vec{\omega}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})}_{\text{centrífuga I (devido a movimentos r/ respeito a } \Sigma')}$$

forças adicionais ao peso ($\vec{N}$, etc)

Uma partícula em repouso e em equilíbrio na origem de Σ' ($\vec{r} = \vec{v} = \vec{a} = 0$) satisfaz $\vec{T} + m\vec{g}_{\text{ef}} = 0 \rightarrow \vec{g}_{\text{ef}}$ dá a "direção de prumo"

Note que $\vec{g}_{\text{ef}}$ não é vertical:
 $\rightarrow$ termo centrífugo

$$\vec{g}_{\text{ef}} = - \underbrace{(g - R\omega^2 \cos^2 \lambda)}_{< g} \hat{k} + \underbrace{R\omega^2 \sin \lambda \cos \lambda}_{\text{comp. N-S, na direção do Eq.}} \hat{i}$$

$$\text{p/a Terra: } R\omega^2 = 6,4 \times 10^6 \text{ m} \cdot (7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \approx 3 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \ll g$$

(ainda, perto do equador ^{ou pólos} só a parte centrífuga tem efeito)

Ainda se $|\vec{r}| \leq R$, a contribuição do "termo centrífugo II" é completamente desprezível até mesmo em comparação c/ o termo centrífugo I.

Já o termo de Coriolis pode ser relativamente grande, mas mesmo no caso em que $|a_{\text{cor}}| = 2\omega v$ (máx), uma vel. de $v = 2000 \text{ km/h}$ leva a $a_{\text{Coriolis}} = 0,08 \text{ m/s}^2$